

# 最適調整に関する研究 (その1)

直線型の伝達函数

四 谷 平 治

Study On Optimum Control (part 1)  
Transfer Function of Linear Systems

Heizi YOTUYA

## Abstracts

About the theoretical investigation of optimum control problem several studies have been already done since the work of Ziegler-Nichols, 1942. And though the theory and its method of procedure are seemed to be perfect, there are several points somewhat ambiguous, and to be improved. This report is intended to contribute in these fields.

In the first place here the transfer function of linear systems are studied.

## 1. 結 言

自動制御系の動作を最適にするにはどうすれば良いかという事に関する理論的研究は近年になってかなり活潑に行われる様になった。1942年から1943年にかけて Ziegler, Nichols<sup>(1)</sup>は制御面積を最小にするという立場から最適調整を論じ又同じ年に経験則として限界感度法の近似公式を与えた。1950 年になってHazebroek, waerden<sup>(2)</sup>は自乗制御面積を最小にするという観点からこの問題を論じた。この方法は最小自乗法の原理にかなっている事と近年になって統計的手法が自動制御理論に取り入れられる様になって以来ますますその重要性が認識される様になってきた。この二つを基礎としてこれらを実地的見地から若干修正した型式の最適調整に関する研究が数多くなされている。<sup>(3)(4)</sup>これらの方法は総べて要素特性を直線型と仮定して進められているものである。

しかしながら一方において実際の制御要素の特性は必ずしも直線型ではなくむしろ厳密に言うならば非線型のものが多い。又良い性能の動作をさせようとするにはわざと非線型の特性を持つ要素を導入する方がよい場合も多い。最近になって自動制御系において殊にサーボ機構でその補助動力源の定格がある一定値に押えられてこれを超えてはならないという制限のついた場合とか油圧サーボの最高速度がある有限の場合等にどうするかという問題もやはり非線型の一部として取扱われる様になってきた。

しかしこれらを取扱い方なり解析の方法を見ると何かしらすつきりとしていない様に思われる。その場その時の cut and try 的なやり方であつてすつきりとした大系になつていない様に思われる。この研究はその様な観点から伝達函数にさかのぼり再検討したものである。先ずこの報告では直線型の伝達函数について述べる。

## 2. 三つの基本動作素子

先ず自動制御装置はプロセス制御でもサーボ機構でもこれを窮極まで分析すると三つの動作素子

即ち比例動作，微分動作及び積分動作から成立っていることを示そう。一つの例を取って考える。

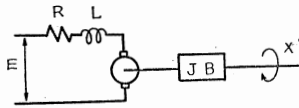


図-1 直流電動機

図-1 参照 図-1は直流電動機系であるがこれをブロック図で表わすと図-2が求められる。これら

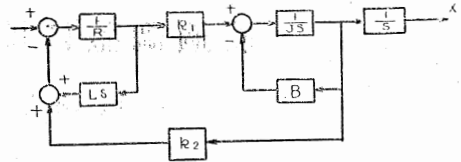


図-2 ブロック図

の各ブロックを見ると  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\frac{1}{R}$ ,  $B$  の様な比例動作,  $Ls$  の様な微分動作  $\frac{1}{s}$ ,  $\frac{1}{Js}$  の様な積分動作をする素子からなっている通り一方向伝達であるのが特徴であるがこの信号の伝達が可逆的に行われる素子(可逆素子又は回路素子という)と可逆的に行われない素子(非可逆素子又は制御素子という)とがある。これについては後で述べる。これらの三つの基本素子は入力信号又は出力信号(動作量という)を適当に変換することによって比例素子を1, 微分素子をs, 積分素子を $\frac{1}{s}$ に直すことが出来る。そうした後これを無次元化をすることにより所謂規格化(normalize)することが出来るわけである。すなわち各素子は規格化すれば1, s,  $\frac{1}{s}$ なる三つの素子となる。同様の事は動作量を変換せずに時間(従って経過速度)を変換することによつても達せられる。

表-1 基本素子の例

電 気 的	抵抗  $C = RL$ $E = RI$	インダクタンス  $e = L \frac{di}{dt}$ $E = sLI$	キャパシタンス  $e = \frac{1}{C} \int i dt$ $E = \frac{1}{sC} I$	直列回路  $E = (sL + R + \frac{1}{sC}) I$
機 械 的	粘性摩擦  $f = R\dot{x}$ $F = RX$	慣性  $f = M\ddot{x}$ $F = sM\dot{x}$	コンプライアンス  $f = \frac{1}{C} \int \dot{x} dt$ $F = \frac{1}{sC} \dot{x}$	直列 M I C  $F = (sM + R + \frac{1}{sC}) \dot{x}$
空 気 的	レシダンス  $P = RQ$ $P = RQ$	容量  $P = \frac{1}{C} \int Q dt$ $P = \frac{1}{sC} Q$		直列 R I C  $P = (R + \frac{1}{sC}) Q$

表-1は制御要素にしばしば使われる基本素子を電氣的, 機械的及び空氣的の場合について示したものである。

### 3. 要素の結合法

一船にある伝達函数  $G(s)$  に入力信号  $B(s)$  が加わり出力信号  $C(s)$  を得たとすれば(図-3参照)これの逆回路として図-4の如く表わすことは数学的取扱いの上が差支えない。但しこれは注意を要することであつて若し  $G(s)$  の内に非可逆要素が含まれる様な場合には入力信号に  $C(s)$  を加えても出力信号に  $B(s)$  は得られないであろう。つまり物理的には問題はあるけれどもこれを数学的に取扱う上から換言すれば力学的に考えれば逆回路として図-4の様に考えることは差支えない。

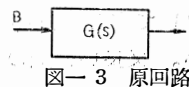


図-3 原回路

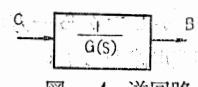


図-4 逆回路

結合法には周知の通り縦続結合, 並列結合及びフィードバック結合がありこれらを素示すると表-1の如くなる。この内縦続結合で  $G_1$  から  $G_2$  に信号伝達が行われる時に負荷効果を考えねばならない場合は注意を要する。

表-2は前節で求めた三つの基本素子を結合して得られる組合わせを示したものでこれによつて一次要素の総ての場合が得られる。さてここでフィードバック結合は並列結合の逆回路として理解される。図-5参照。図において左の原回路に対してその逆回路を求めると右の図の如くなる事が分る。この事から一般に次の様に推論することが出来る。

表-2 基本素子の結合 (一次要素)

組合せ		1, s	$1, \frac{1}{s}$	$s, \frac{1}{s}$
結合				
縦	続	s	$\frac{1}{s}$	1
並	列	$1+s$	$\frac{1+s}{s}$	$\frac{1+s^2}{s}$
フィードバック		$\frac{s}{1+s}$	$\frac{1}{1+s}$	$\frac{s}{2}$

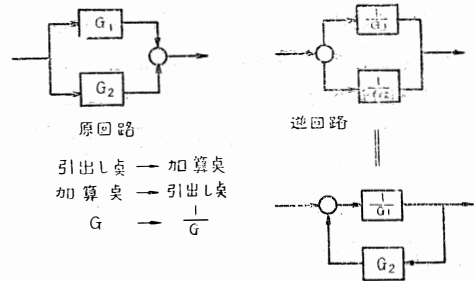
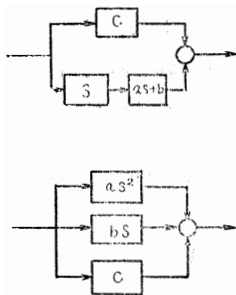


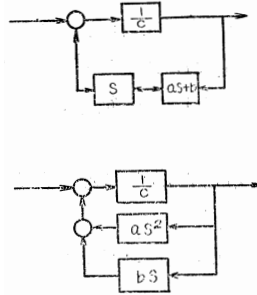
図-5 原回路と逆回路

法則—ある伝達函数の逆回路を作るには引出し点を加算点に加算点は引出し点に変更し各ブロックの伝達函数の逆数に相当するものを伝達函数とするものを作ればよい。但し伝達函数の内に非可逆のものがあればその伝送方向を逆にして元の伝達函数を入れておく。



$$as^2 + bs + c$$

図-6 二次要素



$$\frac{1}{as^2 + bs + c}$$

図-7 二次要素

これは丁度電気回路を作る手順によく似ている。この事を知つておればある任意の伝達函数が与えられた時これをブロック図に表わすことは非常に容易となる。例えば二次要素をブロック図に表わすには図-6の様になり又その逆回路を求めるには図-7の如きものが容易に作られるわけである。

かくして一般の伝達函数<sup>(4)</sup>

$$G(s) = \frac{\prod (1+T'ks) \prod (1+2\zeta'ks/W'nk+s^2/W'^2nk)}{s^N \prod (1+T'ks) \prod (1+2\zeta ks/Wnk+s^2/W^2nk)}$$

に含まれる各項の積は縦続結合により、分子の各項は並列結合により、分母の各項従つて各分数はフィードバック結合により表示することが出来ることが分つたわけである。

#### 4. 可逆素子と非可逆素子

一般に自動制御系は信号の流れを問題とするものであつて一つの閉回路に沿つて一方向に信号が伝達されてゆくものである。この様な行われるために電気の L, R, C の様な回路素子或いはこれと同性質のもの他に信号伝達の非可逆的なものが含まれる場合が多い。前者を可逆素子又は回路素子と言い後者を非可逆素子又は制御素子という。例を挙げると図-8 の如くなり (a) は可逆素子の例であり (b) は非可逆素子の例である。自動制御系をブロック図に分解してその性質を調べる時には多くの場合この非可逆素子の所で

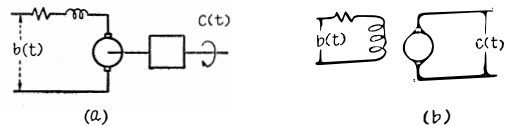
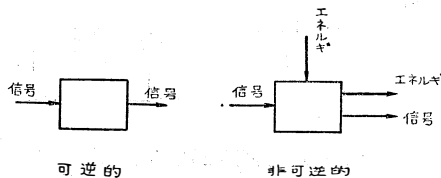


図-8

区分すると便利である。その理由はそれから後段の影響が非可逆的であるために前段に及ばないからである。従つて負荷効果を考えなくてすむ為に取り扱いが非常に楽になる。

さてこの非可逆素子の持つ著しい特徴の一つはこの点において必ず外部から、エネルギーの注入を受けていることである。この注入を受けたエネルギーを前段からくる信号によつて所謂通信工学で云う変調を受けて後段への動力源をなしていると見る事が出来る。従つて後段において負荷効果を持つ場合即ちエネルギーを吸収する場合にはそのエネルギーは外部から注入されるエネルギーの内から補給されるものであつて前段の信号には何等の關係のない事を注意する必要がある。以上の事柄を一つ



図—9 可逆的と非可逆的

わけである。

## 5. 結 言

以上の事から直線型の要素のみからなる自動制御系はこれを窮極の素子として  $1$ ,  $s$ , 及び  $\frac{1}{s}$  なる三つの基本素子に分解させてこれを縦続, 並列及びフィードバック (或いはこれを直列結合と見てもよい) の三結合法で結ばれたものと見ることによつて従来の電気回路の取扱いと非常に似た計算法が適用出来ると見る事が出来る。しかして伝達函数の積は縦続結合により和は並列結合により, 分数形はフィードバック結合により実現することが出来ることを知つた。(逆回路作成の手順による)。

又制御回路の要素の内には可逆的なものがあり, 非可逆的要素にはエネルギーの注入が行われることが分つた。

この事から制御回路のシンセシスに関する手掛りが得られる。

## 参 考 文 献

- (1) Zigler, Nichols, Trans. ASME 1942 p. 759
- (2) Hazebroek, Waerden, Trans. ASME 1950 p. 309
- (3) 例えば A法とか Nims 法
- (4) 高橋安人, 自動制御理論 127頁